Die ganzen, rationalen, reellen Zahlen

Referenz: [Halbeisen-Skript: Kapitel 4],
[Ebbinghaus, Einführung in die Mengenlehre, Kap. V, §4]

Jede Art von Zahlen ist ein Konstrukt, das bestimmten Zwecken dient:

- Natürliche Zahlen dienen zum Zählen endlich vieler Dinge.
- Negative Zahlen drücken das Fehlen einer Anzahl von Dingen aus.
- Rationale Zahlen stehen für Verhältnisse zwischen ganzen Zahlen.
- Positive reelle Zahlen messen Abstände.
- Reelle Zahlen repräsentieren Punkte auf einer Geraden und bilden die Grundlage der Analysis.
- Komplexe Zahlen bilden die Grundlage der höheren Mathematik und Physik.

Jede Art von Zahlen muss erst konstruiert werden, bevor man sie gebrauchen kann.

Konstruktion von $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{ \underbrace{\langle n, 0 \rangle}_{-n} \mid n \in \mathbb{N},\ n > 0 \}.$$

Setze: $-n$

Setze $-0 := 0$.

$(-m) + (-n) := -(m+n)$

$m + (-n) := \begin{cases} k \\ -k \end{cases}$

$m \geq n$: d.h. $\exists k \in \mathbb{N}: m = n+k$

$m < n$: d.h. $\exists k \in \mathbb{N}: n = m+k,\ k > 0$.

$(-n) + m :=$ genauso.

$m \cdot (-n) := (-n) \cdot m := -mn$

$(-m) \cdot (-n) := m \cdot n$.

Satz: $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein komm. unitärer Ring.

Dabei ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Element $-n$ das additive Inverse von n.

Für $x, y \in \mathbb{Z}$ ist

$$x \leq y :\Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{N}.$$

Dies ist eine Totalordnung mit den üblichen Regeln bzgl. $+$ und $\cdot$.

Konstruktion von $\mathbb{Q}$:

$S := \{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 \mid b>0\}$

$(a,b)\sim(a',b') :\iff ab' = a'b.$

Bem.: Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Sei $[(a,b)]$ die Äquivalenzklasse von (a,b).

Bem.: Für alle $(a,b),(c,d)\in S$ hängen

$$[(a,b)]+[(c,d)] := [(ad+bc,\, bd)]$$

$$[(a,b)]\cdot[(c,d)] := [(ac,\, bd)]$$

nur von $[(a,b)]$ und $[(c,d)]$ ab.

Satz: Die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{Q}$ ist mit $+$ und $\cdot$ sowie $[(0,1)]$ und $[(1,1)]$ ist ein Körper.

Setze: $\boxed{\frac{a}{b} := [(a,b)].}$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

Def.: $[(a,b)] \le [(c,d)] :\iff [(c,d)]-[(a,b)] = [(e,f)]$ mit $e\geq 0$.

Prop.: Dies ist eine Totalordnung mit den üblichen Regeln bzgl. $+$ und $\cdot$.

Bem.: $\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, $a\mapsto \frac{a}{1}$ ist ein injektiver Ringhomomorphismus.

Wir identifizieren $\mathbb{Z}$ mit seinem Bild.

Proposition: Es gilt $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \omega$.

Übung: Konstruiere eine explizite Bijektion $\omega \to \mathbb{Q}$

Beweis: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q} \Rightarrow \omega = |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{Z}^2 \supseteq S \twoheadrightarrow \mathbb{Q} \Rightarrow |\mathbb{Q}| \leq |S| \leq |\mathbb{Z}^2| = |\mathbb{Z}|^2 \leq \omega^2 = \omega$.

$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| + |\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}| = |\mathbb{N}| + |\mathbb{N}| = \omega$.

qed.

Angeordnete Körper:

Definition: Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K zusammen mit einer Totalordnung $\leqslant$, so dass ausserdem für alle $x, y, z \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} x \leqslant y \quad &\Longrightarrow \quad x + z \leqslant y + z \\ x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \quad &\Longrightarrow \quad x \cdot y \geqslant 0 \end{aligned}$$

Definition: Für zwei rationale Zahlen a und b setzen wir $a \leqslant b$, wenn ganze Zahlen $m \geqslant 0$ und $n > 0$ existieren mit $b - a = \frac{m}{n}$.

Proposition: Die rationalen Zahlen zusammen mit $\leqslant$ bilden einen angeordneten Körper.

Betrachte einen angeordneten Körper $(K, \leqslant)$.

Proposition: Für alle $x, y, z \in K$ gilt:

(a) $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$ Axiom.

(b) $x < y \iff x + z < y + z$ $\leftarrow$ $y - x = (y+z) - (x+z)$.

(c) $x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0$ $\longleftarrow$ $x \geq 0 \overset{(a)}{\Longrightarrow} 0 = x + (-x) \geq 0 + (-x) = -x$.

(d) $x > 0 \iff -x < 0$ $\longleftarrow$ (b)

(e) $1 > 0$ $\longleftarrow$ Wäre $1 \leq 0$, wäre $-1 \geq 0$ nach (c)
$\Longrightarrow 1 = (-1)\cdot(-1) \geq 0$ nach Axiom.
$\Longrightarrow 1 = 0$ Widerspruch! Also ist $1 > 0$.

(f) $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$

(g) Ist $z > 0$, so gilt $x \leqslant y \iff xz \leqslant yz$.

(h) Ist $z > 0$, so gilt $x < y \iff xz < yz$.

Proposition: Es existiert eine eindeutige injektive Abbildung $i\colon \mathbb{Q} \hookrightarrow K$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$i(0) = 0 \qquad i(a+b) = i(a) + i(b) \qquad a \leqslant b \iff i(a) \leqslant i(b)$$
$$i(1) = 1 \qquad i(a \cdot b) = i(a) \cdot i(b)$$

Bew.: Konstruiere $i(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion.

(Skizze.) $i(Sn) = i(n+1) = i(n) + 1$.

$i(-n) := -i(n)$.

$i\left(\frac{n}{m}\right) := \frac{i(n)}{i(m)}$ ← wohldefiniert da $i(m) \neq 0$ ist.

und $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \Rightarrow nm' = n'm \Rightarrow i(n) \cdot i(m') = i(n') \cdot i(m)$

$\Rightarrow \frac{i(n)}{i(m)} = \frac{i(n')}{i(m')}$.

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \Rightarrow i(n) > 0$.

Bew.: Induktion: $1 = i(1) > 0$.

$i(n) > 0 \Rightarrow i(n+1) = i(n) + 1 > i(n) > 0$.

$1 > 0$

Beh.: i ist auf $\mathbb{Z}$ mit $+$ und $\cdot$ verträglich. qed.

qed

Konvention: Wir identifizieren $\mathbb{Q}$ mit seinem Bild via i.

Definition: Ein *angeordneter Körper* heisst *vollständig*, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke besitzt.

Proposition-Definition: Ist K vollständig, so gilt:

(a) Die kleinste obere Schranke einer nach oben beschränkten nichtleeren Teilmenge X ist eindeutig bestimmt und heisst das *Supremum von X* und wird bezeichnet mit $\sup(X)$.

(b) Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge X besitzt eine eindeutige grösste untere Schranke, genannt das *Infimum von X* und bezeichnet mit $\inf(X)$.

(c) Es gelten die üblichen Rechenregeln zwischen $+$ und $\cdot$ und $\leqslant$ und sup und inf.

Proposition: Ist K vollständig, so gilt:

$\frac{1}{x} < n \iff \frac{1}{n} < x.$

(a) Für alle $x \in K$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

(b) Für alle $x \in K$ mit $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ und $\frac{1}{n} < x$.

$0 < \frac{1}{n} < x.$

(c) Für alle $x, y \in K$ mit $x < y$ existiert ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$.

Bew.: Wähle $n \in \mathbb{N}, n > 0$ mit $\frac{1}{n} < y - x$.

$\Rightarrow n \cdot (y - x) > 1 \Rightarrow ny > nx + 1$.

Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > nx$ und $m > -nx$.

$\Rightarrow -m < nx < m$

$\Rightarrow \exists m' : m' - 1 \leq nx < m'$.

$\Rightarrow nx < m' \leq nx + 1 < ny$

$\Rightarrow x < \frac{m'}{n} < y$.

qed.

Proposition: Für jedes $x \in K$ setze $A_x := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\}$. Ist K vollständig, so gilt für alle $x, y \in K$:

(a) $x = \sup(A_x)$

(b) $A_{x+y} = \{a + b \mid a \in A_x,\ b \in A_y\}$

(c) $A_{-x} = \{a - b \mid a \in \mathbb{Q}^{<0},\ b \in \mathbb{Q} \setminus A_x\}$

(d) $A_{x \cdot y} = \{a \cdot b \mid a \in A_x,\ b \in A_y,\ a, b \geqslant 0\} \cup \mathbb{Q}^{<0}$ im Fall $x, y \geqslant 0$

(e) $x \leqslant y \iff A_x \subseteq A_y$

Bew.: (a) A_x hat die obere Schranke x.
Wähle $n \in \mathbb{N}$: $n > -x \Rightarrow -n < x \Rightarrow -n \in A_x$
$\Rightarrow A_x \neq \emptyset \Rightarrow \underset{y}{\sup(A_x)}$ wohldefiniert mit $y \leq x$.

Wäre $y < x$, gäbe es $a \in \mathbb{Q}$ mit $y < a < x \Rightarrow a \in A_x$, $a > y \Rightarrow$ Widerspruch!

(b) $\forall a \in A_x\ \forall b \in A_y$: $a < x \wedge b < y \Rightarrow a + b < x + y \Rightarrow a + b \in A_{x+y}$.
Sei $c \in A_{x+y}$, also $c \in \mathbb{Q}$ und $c < x + y$. Dann ist $c - y < x$.
Wähle $a \in \mathbb{Q}$ mit $c - y < a < x$. Setze $b := c - a \in \mathbb{Q}$.
$\Rightarrow a \in A_x$ und $b = c - a < y \Rightarrow b \in A_y$, und $a + b = c$.

(c) $\forall a \in \mathbb{Q}^{<0}\ \forall b \in \mathbb{Q} \setminus A_x$: $b \geq x \Rightarrow a - b < -b \leq -x \Rightarrow a - b \in A_{-x}$.
Sei $c \in A_{-x}$, dann ist $c < -x \Rightarrow c + x < 0$.
Wähle $a \in \mathbb{Q}$ mit $c + x < a < 0 \Rightarrow b := a - c > x \Rightarrow b \notin A_x$.
$c = a - b$.

(d) Ü.

(e) ✓ qed.